

# Verschiebung, Streckung und Spiegelung von Exponentialfunktionen

Die **allgemeine Exponentialfunktion** hat die Funktionsgleichung:

$$f(x) = a \cdot b^{x+c} + d \quad \text{mit} \quad D = \{x \in \mathbb{R}\}, \quad b > 0, \quad b \neq 1, \quad a \neq 0$$

Ihr Wertebereich ist abhängig von den Parametern a und d. Der Graph strebt auf einer Seite gegen unendlich und wird auf der anderen Seite durch eine **waagrechte Asymptote** begrenzt. Es gilt:

$$\text{für } a > 0 \quad W = \{y \in \mathbb{R} \mid d < y < \infty\} \quad \text{und} \quad \text{für } a < 0 \quad W = \{y \in \mathbb{R} \mid -\infty < y < d\}$$

## 1. Parameter b: Monotonie und Spiegelung an der y-Achse

**Monoton fallend**  
 $0 < b < 1$

**Monoton steigend**  
 $b > 1$

Der **Wert** von b bestimmt, ob der Graph monoton steigend oder fallend ist. Dabei ist b immer **größer als 0** und **nicht 1**. Liegt der Wert von b *zwischen* 0 und 1, ist der Graph streng **monoton fallend**, während er bei einem Wert *größer* als 1 streng **monoton steigend** ist. Je größer der Wert von b über 1, desto schneller steigt die Funktion. Je kleiner der Wert von b zwischen 0 und 1, desto schneller fällt sie.

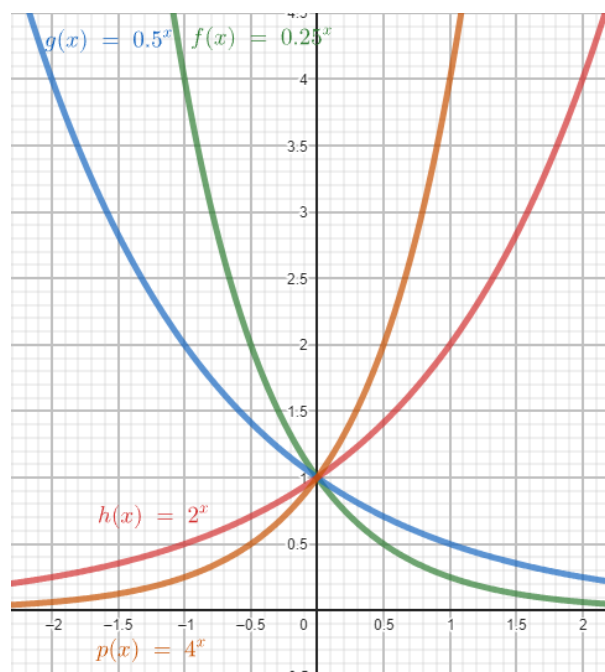
Grün:  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x = 0,25^x$

Blau:  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,5^x$

Rot:  $h(x) = 2^x$

Orange:  $p(x) = 4^x$

Die Graphen  $y = b^x$  und  $y = \left(\frac{1}{b}\right)^x$  sind zueinander **symmetrisch** bezüglich der **y-Achse**. Exponentialfunktionen nur mit dem Parameter b verlaufen durch den Punkt  $(0|1)$ , haben die Asymptote bei  $y=0$  und keine Nullstelle. Für ihren Wertebereich gilt  $W = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y < \infty\}$



## 2. Parameter a: Streckung/Stauchung, Monotonie und Spiegelung an der x-Achse

Stauchung/Streckung		Monotonie	
Streckung $ a  > 1$	Stauchung $0 <  a  < 1$	Monoton steigend $a > 0$	Monoton fallend $a < 0$

Der **Betrag** von a bestimmt, ob der Graph in y-Richtung bei einem Betrag von a *zwischen* 0 und 1 **gestaucht** oder bei einem Betrag von a *größer* 1 **gestreckt** ist.

Das **Vorzeichen** von a bestimmt, ob der Graph an der x-Achse **gespiegelt** wird, also ob die Funktion bei a *größer* 0 streng monoton **steigend** nach **oben** oder bei a *kleiner* 0 streng monoton **fallend** nach **unten** verläuft.

Grün:  $f(x) = 2^x$

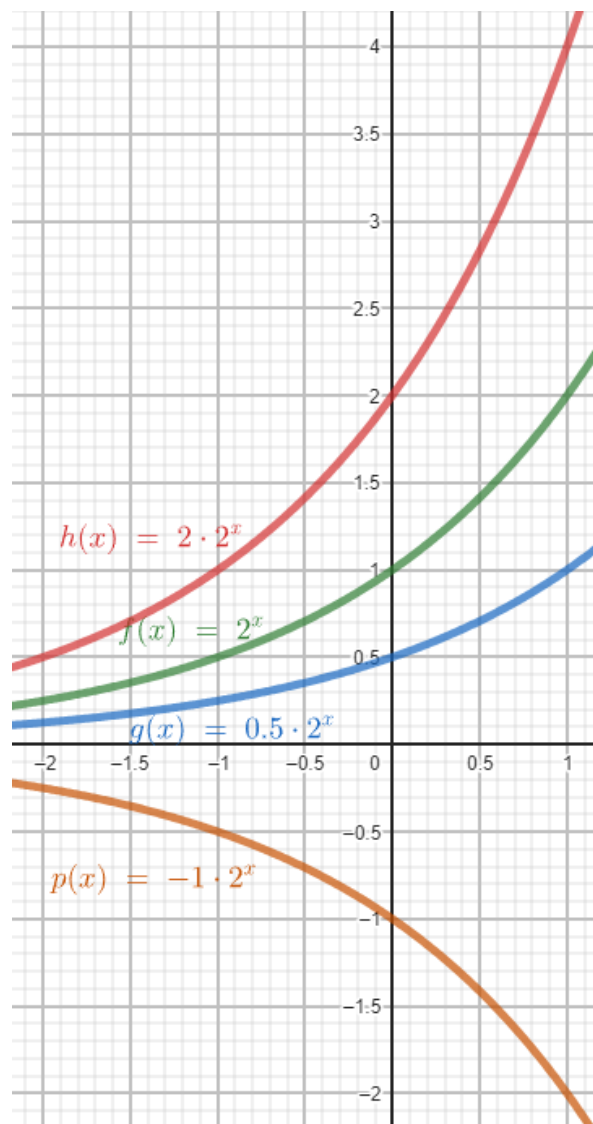
Blau:  $g(x) = 0,5 \cdot 2^x$

Rot:  $h(x) = 2 \cdot 2^x$

Orange:  $p(x) = -1 \cdot 2^x$

Die Graphen  $y = a \cdot b^x$  und  $y = -a \cdot b^x$  sind zueinander **symmetrisch** bezüglich der **x-Achse**. Exponentialfunktionen nur mit den Parametern a und b verlaufen durch die Punkte  $(0|a)$  und  $(1|b \cdot a)$ , haben die Asymptote bei  $y = 0$  und keine Nullstelle.

Für ihren Wertebereich gilt bei a größer 0  
 $W = \{y \in \mathbb{R} \mid d < y < \infty\}$  und bei a kleiner 0  
 $W = \{y \in \mathbb{R} \mid -\infty < y < d\}$ .



### 3. Parameter d: Verschiebung in y-Richtung

**Verschiebung nach oben**  
 $d > 0$

**Verschiebung nach unten**  
 $d < 0$

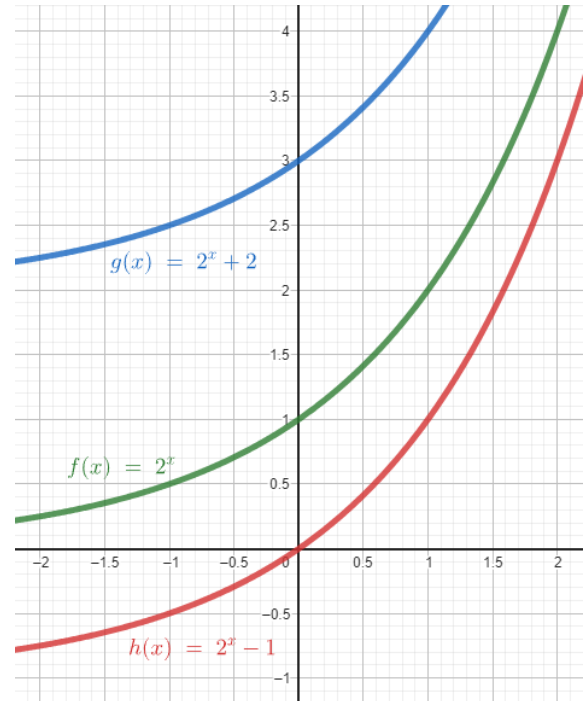
Der **Wert** von  $d$  bestimmt, ob der Graph in  $y$ -Richtung bei  $d$  *größer* 0 nach **oben** oder bei  $d$  *kleiner* 0 nach **unten** verschoben wird.

Grün:  $f(x) = 2^x$

Blau:  $g(x) = 2^x + 2$

Rot:  $h(x) = 2^x - 1$

Exponentialfunktionen nur mit den Parametern  $b$  und  $d$  verlaufen durch die Punkte  $(0|1+d)$  und  $(1|b+d)$  und haben die **Asymptote** bei  $y = d$ . Der Graph hat im Falle von  $d < 0$  eine **Nullstelle** bei Punkt  $(\log_b(-d)|0)$ . Für ihren Wertebereich gilt  $W = \{y \in \mathbb{R} \mid d < y < \infty\}$



### 4. Parameter c: Verschiebung in x-Richtung

**Verschiebung nach links**  
 $c > 0$

**Verschiebung nach rechts**  
 $c < 0$

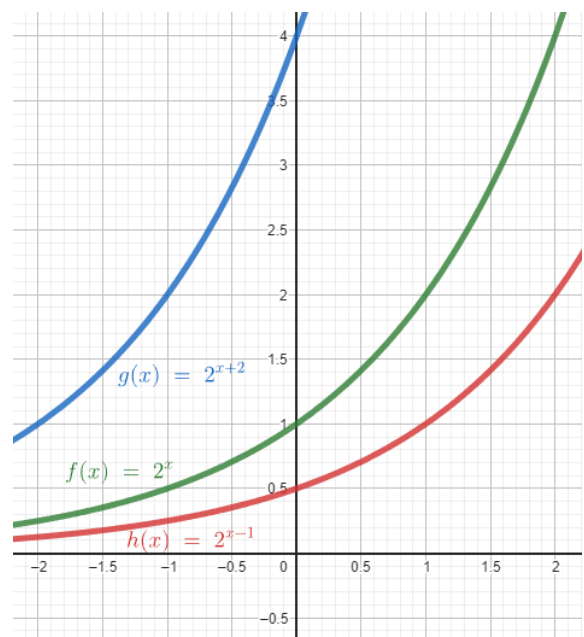
Der **Wert** von  $c$  bestimmt, ob der Graph in  $x$ -Richtung bei  $c$  *größer* 0 nach **links** oder bei  $c$  *kleiner* 0 nach **rechts** verschoben wird.

Grün:  $f(x) = 2^x$

Blau:  $g(x) = 2^{x+2}$

Rot:  $h(x) = 2^{x-1}$

Exponentialfunktionen nur mit den Parametern  $b$  und  $c$  verlaufen durch den Punkt  $(-c|1)$ , haben die Asymptote bei  $y = 0$  und keine Nullstelle. Für ihren Wertebereich gilt  $W = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y < \infty\}$



## 5. Zusammenhang zwischen Parameter c und a

Die Verschiebung in x-Richtung durch Parameter c kann gleichermaßen als Streckung durch den Parameter a erreicht werden. Es gilt aufgrund der **Potenzgesetze**:

$$\text{für } b > 1 \text{ bei } c > 0: f(x) = a \cdot b^{x+c} = a \cdot b^c \cdot b^x \quad y = 2^{x+3} = 2^3 \cdot 2^x = 8 \cdot 2^x$$

$$\text{für } b > 1 \text{ und } c < 0: f(x) = a \cdot b^{x-c} = a \cdot b^{-c} \cdot b^x = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^c \cdot b^x \quad y = 2^{x-2} = 2^{-2} \cdot 2^x = \frac{1}{2^2} \cdot 2^x = \frac{1}{4} \cdot 2^x$$

## 6. Exponentialfunktionen mit mehreren Parametern

Exponentialfunktionen mit den Parametern a, b und d verlaufen durch die Punkte  $(0|a+d)$  und  $(1|b \cdot a+d)$  und haben die **Asymptote** bei  $y=d$ .

Der Graph hat im Falle von  $d < 0$  und/oder  $a < 0$  eine **Nullstelle**.

Für ihren Wertebereich gilt bei a *größer* 0  $W = \{y \in \mathbb{R} \mid d < y < \infty\}$  und bei a *kleiner* 0  $W = \{y \in \mathbb{R} \mid -\infty < y < d\}$ .

Grün:  $f(x) = -0,5 \cdot 2^x + 1$

Blau:  $g(x) = 2 \cdot 3^x - 3$

Rot:  $h(x) = 2 \cdot 0,5^x - 4$

